2.2.1 多递归生成器 2020年5月22日10点41分

阶多递归生成器(MRG)由一系列维状态向量决定,其分量满足线性递归

对于某些模数m,乘数,以及给定的种子.该生成器的最大周期长度为.为了产生快速算法,除少数几个乘数外,其他所有乘数都应为0.当为大整数时，可通过获得随机数的输出流.

通过组合几个较小周期的MRG,可以有效地实现周期很大的MRG,从而产生组合的多递归生成器.

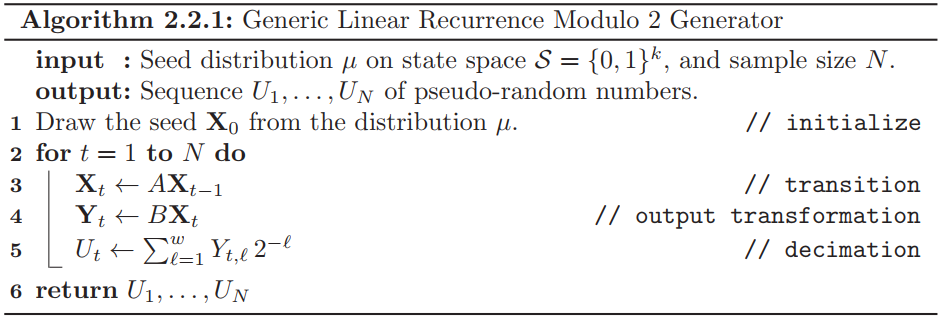
最成功的合并MRG之一是L’Ecuyer [9]的MRG32k3a,它使用了两个3阶MRG,并且重复发生

且输出为

周期长度约为.生成器MRG32k3a通过了当今最全面的测试套件TestU01[11]中的所有统计测试，并已在许多软件包中实现，包括Matlab，Mathematica，Intel的MKL库，SAS，VSL，Arena， 和Automod。 它也是L'Ecuyer的SSJ模拟程序包中的核心生成器，并且可以轻松扩展以生成多个随机流.

2.2.2 模2线性生成器 2020年5月22日11点23分

好的随机生成器必须具有非常大的状态空间.对于线性同余生成器,这意味着模数m必须为大整数.但是,对于多个递归生成器,由于周期长度可以高达mk-1,因此不必采用较大的模数.因为二进制操作通常比浮点操作快(而浮点操作又比整数操作快).考虑基于线性递归模2的MRG和其他随机数生成器是有意义的.[10]中给出了此类随机数生成器的通用框架,其中状态为位向量通过线性变换映射到位输出向量,从而随机数按位抽取如下获得:



在此,A和B分别是和二进制矩阵,并且所有运算都以2为模.特别是,加法对应于按位XOR运算(特别是1+1 = 0).整可以看作是计算机的字长(即w = 32或64).通常情况下(但有例外,请参见[10]),k比w大得多.

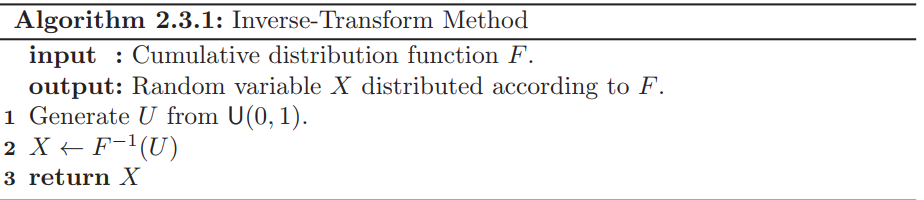
例2.3 马特赛特旋转演算法 过程比较复杂,只给出的算法过程,但没有给出原理.

2.3 随机变量生成

在本节中,我们讨论从规定的分布生成一维随机变量的各种通用方法.我们考虑逆变换方法,混叠方法,合成方法和接受拒绝方法.

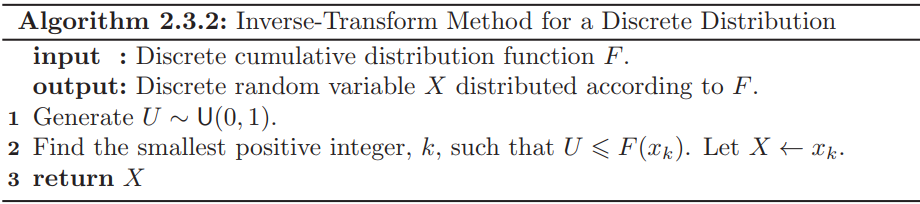
2.3.1 逆变换法

本小节内容给出了你变换法的原理,将均匀随机变量传递给CDF逆函数即可得到的相应随机变量X.



例2.5 有序统计量

例2.6 从离散分布中选取随机变量

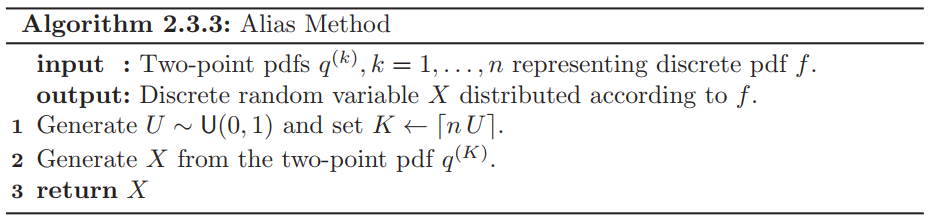


2.3.2 2020年5月29日15点11分

生成离散随机变量的逆变换方法的一种替代方法,即所谓的别名方法[19]，该方法不需要像算法2.3.2的步骤2那样费时的搜索技术.它基于以下事实:任意离散的n点pdf f:

可以表示为n个pdf的均等加权混合,,每个元素最多具有两个非零分量.也就是说，任何n点pdf f都可以表示为

对于两点pdf 的适当定义;参见[19].

别名方法相当通用且有效，但需要初始设置和n份pdf q（k）的额外存储。 在[2]中可以找到计算这两点pdf的过程。 一旦建立了表示（2.8），从f的生成就很简单，可以这样写：

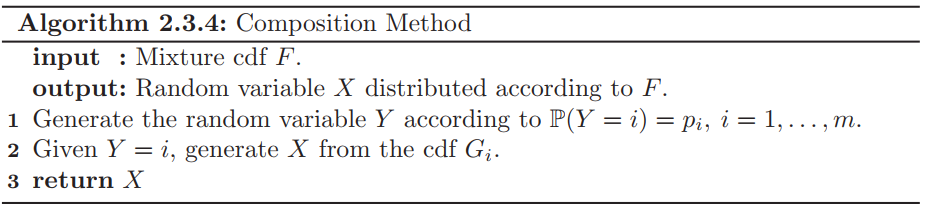
2.3.3 合成方法

此方法假定cdf F可以表示为多个cdf {Gi}的混合,也就是说,

其中

设,是离散随机变量,其且与独立,.则具有cdf F的随机变量X可表示为

因此,为了从F生成X，我们必须首先生成离散随机变量Y，然后在给定Y = i的情况下从Gi生成Xi。 因此，我们有以下方法：



2.3.4 接受拒绝方法

就它们直接处理要生成的随机变量的cdf而言，逆变换和合成方法是直接方法。 由于Stan Ulam和John von Neumann，接受/拒绝方法是一种间接方法。 当上述直接方法失败或证明计算效率低下时，可以应用该方法。

为了介绍这个想法，假设目标pdf f（我们要从中采样的pdf）以某个有限区间[a，b]为边界，并且在该间隔之外为零（见图2.3）。 设

在这种情况下,生成随机变量很简单,可以使用以下接受/拒绝步骤来完成:

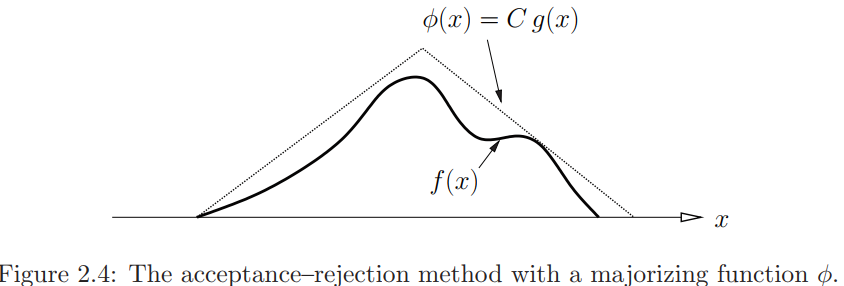
产生X〜U（a，b）。

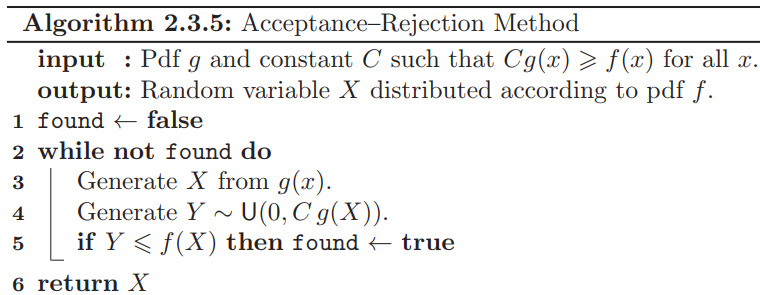
独立于X生成Y〜U（0，c）。

如果Y f（X），则返回Z =X。否则，返回到步骤1。

重要的是要注意,每个生成的向量（X，Y）在矩形[a，b]×[0，c]上均匀分布.因此,接受对（X，Y）在图f下均匀分布。 这意味着X的可接受值的分布具有所需的pdf f.

我们可以将其概括如下:令g为任意密度函数,使得φ（x）= C g（x）使f（x）集中于某个常数C（图2.4）； 即，对于所有x，φ（x）f（x）。 请注意，必然性C1。我们将提案pdf称为g（x），并假设很容易从中生成随机变量。

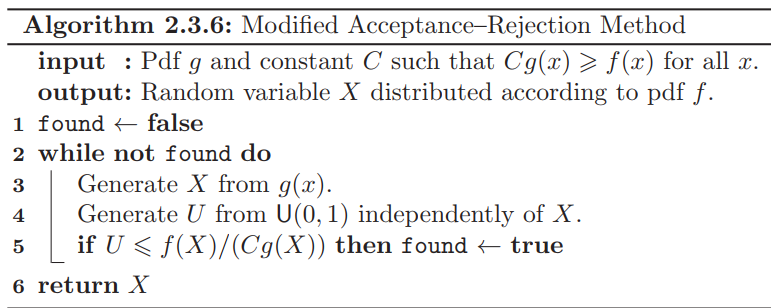




定理2.3.1 根据算法2.3.5生成的随机变量具有所需的pdf f（x）(**证明过程需看懂**)

算法2.3.5的效率定义为

通常,使用算法2.3.5的略微修改版本.这是因为第4行中的与相同,其中,然后我们可以写在第5行中以表示.换句话说,从生成并以概率接受它;否则,拒绝X,然后重试.因此,算法2.3.5的修改版可以重写如下:



2.4 从常用的分布产生随机变量 2020年6月19日13点18分

2.4.1 生成连续随机变量

2.4.1.1 指数分布

如果是指数分布,即它的PDF为

其CDF为

因此可以使用逆变换法得到随机变量X,

2.4.1.2 正态分布

如果,其pdf为

由于正态分布不存在解析CDF,逆变换方法不适用于生成正态随机变量,因此必须设计其他过程.我们只考虑从(标准正态分布)生成数据,因为任何随机都可以表示为,其中来自。Box和Muller开发了从生成变量的最早方法之一,如下所示:

令和为两个独立的标准正态随机变量;因此是平面中的随机点.令为对应的极坐标.因此和也可以看作是随机变量,由于

以及和的联合分布为

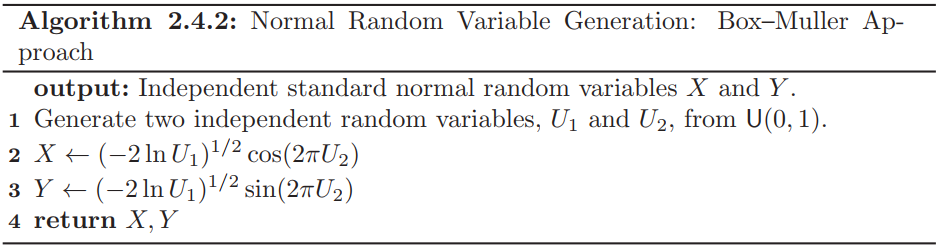
因此可以推导出和的联合分布

即

其中是的取值空间.只依赖值,根据独立随机变量的定义,和是独立随机变量.取常数项作为其pdf,取项作为其pdf,可以看出它们的pdf分别在区间和上各自成立.是在区间上的均匀分布.下面计算的CDF,

因此可以使用逆变换法得到随机变量,

整个生成标准正态分布的流程是: (1)首先利用均匀随机变量生成和随机变量;(2)其次根据公式(2.16)生成标准随机变量和;(3)利用正态分布与标准正态分布的关系来得到最后的结果.



的另一种生成方法是基于接受-拒绝方法.首先,请注意,为了从生成随机变量Y,首先可以从以下pdf生成正随机变量X

然后为X随机分配一个符号.该过程的有效性来自标准正态分布关于零的对称性.

为了从生成随机变量X,我们将与绑定,其中是分布的pdf.使得的最小常数C是.

接受条件,可以写成

其等价于

其中X来自.由于也来自(**可以手动证明**),所以最后的不等式可以写成

其中,是独立的并且均为分布的随机变量.